1. Неориентированный граф – это граф, где каждое ребро задается множеством 2 вершин {u, v}

Ориентированный граф – это граф, где каждое ребро задается упорядоченной парой 2 вершин <u, v>

2. Простой граф – это граф без мульти-ребер и петель

Псевдограф – это мульти-граф с петлями

3. Мульти-ребра – это ребра, у которых совпадают их инцидентные вершины

Мульти-граф – это граф с мульти-ребрами

4. Гиперграф - это граф, в котором ребра могут связывать любое количество вершин. Гиперграф определяется как набор вершин и набор гиперребер, каждое из которых является непустым подмножеством вершин.

5. Нуль-граф – это граф без вершин

Пустой граф – это граф без ребер

Граф-синглтон – это граф из 1 вершины

6. Полный граф – это простой граф , в котором каждая пара различных вершин соединена ребром.

7. Взвешенный граф – это граф G = (V, E, w), в котором каждое ребро имеет соответствующее числовое значение (вес), которое представлено весовой функцией w: E → Num.

8. Планарный граф – это граф, который можно изобразить на плоскости без пересечений рёбер не по вершинам.

9. Подграф графа G (V, E) – это граф G’(V’E’), где его множество ребер и множество вершин являются подмножествами ребер и вершин графа G

10. Spanning subgraph (подграф, охватывающий все вершины) — это подграф графа, который содержит все его вершины.

11. Индуцированный подграф графа G (V, E) — это граф G’, у которого множество вершин – это какое-то подмножество V V’, а множество ребер – это все ребра из множества E, соединяющие вершины V’ в графе G.

12. Отношение смежности – это отношение между двумя вершинами, соединенными ребром.

13. Матрица смежности – это квадратная матрица отношения смежности размера VxV. Для простых графов элементы принимают значения 0 и 1. Для ориентированных графов 0, 1, -1. Для мульти-графов содержит количество ребер между вершинами.

14. Отношение инцидентности – это отношение между ребром и вершинами, которые оно соединяет.

15. Матрица инцидентности – это булева матрица размера VxE отношения инцидентности.

16. Степень вершины – это количество ребер, инцидентных этой вершине. Петли считаются дважды. δ – минимальная степень, Δ – максимальная степень

17. Регулярный граф – это граф, у которого равны степени вершин.

18. Лемма о рукопожатиях – сумма степеней вершин в графе равна удвоенному количеству ребер.

19. Изоморфизм графов G <V1, E1> и H <V2, E2> – это биекция f: V1 -> V2 между множествами вершин V1 и V2 такая, что любые две вершины u и v графа G смежны тогда и только тогда, когда вершины f(u) и f(v) смежны в графе H.

20. Автоморфизм графа – это изоморфизм графа на себя.

21. Гомоморфизм графов – это отображение f: V(G) -> V(H), такое что для любой пары вершин u, v из V(G) выполняется, что если (u, v) является ребром в G, то (f(u), f(v)) является ребром в H.

22. Гомеоморфизм графов — это изоморфизм некоторого подразделения графа G и некоторого подразделения графа H. Подразделение графа G — это граф, полученный делением рёбер в G. Деление некоторого ребра e с конечными вершинами {u, v} даёт граф, содержащий новую вершину w и два ребра {u, w} и {w, v} вместо ребра e.

23. Обход (walk) — это чередующаяся последовательность вершин и ребер.

Trail – это обход с различными ребрами.

Path – это обход с различными вершинами (следовательно с различными ребрами).

Cycle – это замкнутый path

24. Эйлеров путь – это путь, проходящий через все ребра по одному разу.

Эйлеров цикл – это цикл, проходящий через все ребра по одному разу.

Эйлеров граф – это граф, в котором есть эйлеров цикл.

25. Теорема Эйлера для графов: Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны.

Доказательство:

▹

1. Допустим в графе существует вершина с нечетной степенью. Рассмотрим эйлеров обход графа. Заметим, что при попадании в вершину и при выходе из нее мы уменьшаем ее степень на два (помечаем уже пройденные ребра), если эта вершина не является стартовой(она же конечная для цикла). Для стартовой(конечной) вершины мы уменьшаем ее степень на один в начале обхода эйлерова цикла, и на один при завершении. Следовательно, вершин с нечетной степенью быть не может. Наше предположение неверно.

2. Если в графе существует более одной компоненты связности с ребрами, то очевидно, что нельзя пройти по их ребрам одним путем.

◃

26. Гамильтонов путь – это путь, проходящий через все вершины по одному разу.

Гамильтонов цикл – это цикл, проходящий через все вершины по одному разу (кроме первой).

Эйлеров граф – это граф, в котором есть гамильтонов цикл.

27. Теорема Оре: если |V| ⩾3 и deg(u) + deg(v) ⩾ |V| для любых двух различных несмежных вершин u и v неориентированного графа G, то G — гамильтонов граф.

Доказательство: Докажем, что любой негамильтонов граф G нарушает условие deg(u) + deg(v) ⩾ |V|. Пусть G – негамильтонов граф с n> =3 вершинами. Образуем граф H. Будем добавлять по одному ребра, пока есть возможность их добавлять, чтобы не было гамильтонова цикла. Рассмотрим любые 2 несмежные вершины x и y графа. Т. к. мы добавляли ребра до того момента, пока добавление их не приводит к появлению гамильтонова цикла, то добавление ребра приведет к появлению этого цикла. Тогда ребра, отличные от , должны образовывать гамильтонов путь . Теперь для каждого индекса 2<=i<=n рассмотрим два возможных ребра: x-> и ->y. Только одно ребро может присутствовать, т.к. тогда будет цикл . То есть общее число ребер, инцидентных x или y, не превышает n-1. Т. к. в графе G степени вершин не превышают степени вершин H, то для графа G так же не выполняется условие.

28. Теорема Дирака: пусть G — неориентированный граф и δ — минимальная степень его вершин. Если |V| ⩾3 и δ ⩾ |V| /2, то G — гамильтонов граф.

Доказательство: возьмем любые неравные вершины u, v ∈ G. Тогда deg(u)+deg(v)⩾|V| /2+|V| /2=|V|. По теореме Оре G — гамильтонов граф.

29. Эксцентриситет вершины – это максимальное расстояние от этой вершины до другой.

30. Радиус графа – минимальный эксцентриситет вершины в графе

Диаметр – максимальный эксцентриситет вершины в графе

31. Центр графа – это множество вершин, у которых эксцентриситет равен радиусу

32. Центроид дерева – это вершина или 2 вершины, для которых вес (размер максимальной ветви поддерева) минимален

33. Клика – это множество вершин, которые индуцируют полный подграф

34. Независимое множество – это множество попарно несмежных вершин

35. Паросочетание – это множество попарно несмежных ребер

36. Совершенное паросочетание – это паросочетание, покрывающее все вершины графа

37. Вершинное покрытие – это множество вершин, покрывающих все ребра графа

38. Реберное покрытие – это множество ребер, покрывающих все вершины графа

39. Дерево – это связный неориентированный ациклический граф

40. Код Прюфера – это уникальная последовательность номеров длины n-2, связанная с помеченным деревом на n вершинах. Кодирование: на каждой итерации удаляем лист с наименьшим номером и добавляем к коду номер соседа этого листа. После n-2 итераций дерево будет состоять из двух связанных вершин, которые кодировать не нужно, т.к. существует только одно уникальное дерево из 2 вершин.

Асимптотика n\*log(n).

Декодирование: есть множество вершин дерева от 1 до n. Из всех вершин, не содержащихся в текущем коде Прюфера, выбираем вершину с минимальным номером, берем первое число из кода Прюфера и соединяем вершины с этими номерами. Потом заносим в массив used эту вершину с минимальным номером, удаляем первое число из кода Прюфера и продолжаем дальше, пока у нас не останется 2 не использованные вершины. Соединяем их ребром.

Асимптотика n\*log(n).

41. Двудольный граф – это граф, множество вершин которого можно разбить на две части таким образом, что каждое ребро графа соединяет вершину из одной части с какой-то вершиной другой части, то есть не существует рёбер между вершинами одной и той же части графа.

42. Теорема о балансе регулярных двудольных графов - если в двудольном графе каждая вершина имеет одинаковую степень r (r > 0), то количества вершин в каждой доле равны. Доказательство: записываем в левой и правой части равенства количество ребер графа, левую часть представляем как произведение r и количества вершин первой доли, а правую – произведение r и количества вершин второй доли (т.к. ребро не может быть из одной вершины одной доли в другую вершину этой же доли). Сокращаем на r (т. к.> 0) и получаем равенство количества вершин в долях

43. Теорема о существовании совершенного паросочетания в регулярном двудольном графе – каждый r-регулярный (r>0) двудольный граф содержит совершенное паросочетание. Докажем, что для любого подмножества S множества вершин доли X |S| <= |N(S)|. E(S) равно r\*|S|. E(N(S)) = r\*|N(S)|. (из двудольности графа). E(N(S)) не может быть меньше E(S) = r\*|S|. => E(N(S)) >= r\*|S|. Подставляем в неравенство r\*|N(S)| >= r\*|S|, сокращаем на r => условие Холла выполняется => существует совершенное паросочетание по первой доле, доли равны => существует совершенное паросочетание

44. Теорема Холла:

В двудольном графе G = (X, Y, E) существует X-совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда выполняется условие Холла: для любого S (подмножества X) |S|<=|N(S)|

45. Теорема Татта:

В произвольном графе G есть совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда выполняется условие: для любого S (подмножества G) q(G\S) <= |S|

В произвольном графе G = (V, E) есть совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для всякого подмножества вершин U ⊆ V, подграф, построенный на вершинах V \ U содержит не более |U| компонентов связности с нечётным числом вершин. В частности, условие для U = ∅ означает, что число вершин |V | чётно. Чем плохи нечётные компоненты? Тем, что в них заведомо не может быть самодостаточного совершенного паросочетания, и поэтому хотя бы одна вершина оттуда нуждается в паре из U. Доказательство. ⇒ Пусть M ⊆ V — совершенное паросочетание, и пусть U ⊆ V — подмножество вершин. Тогда в подграфе с вершинами V \U, для всякого компонента связности C ⊆ V \ U с нечётным числом вершин, паросочетание M должно содержать хотя бы одно ребро между C и U, т.е., (u, с), где u ∈ U и с ∈ C. Так как вершины u, выбранные для разных таких компонентов C, повторяться не могут (тогда это не было бы паросочетанием), получается, что число вершин в U не может быть меньше, чем число нечётных компонентов связности.

Пусть совершенного паросочетания нет. Пусть Gb = (V, Eb) — граф, полученный из G добавлением максимального числа рёбер, так, чтобы в нём всё ещё не было совершенного паросочетания, но добавление любого дополнительного ребра приводило бы к появлению такового. Тогда достаточно построить множество U ⊆ V, удаление которого разбивало бы Gb так, чтобы в нём оставалось более чем |U| нечётных компонентов связности (тогда и в G число нечётных компонентов связности будет не меньше). (А почему не меньше? Потому что удаление одного ребра не изменяет количества вершин, и потому переводит нечётный компонент в два, один из которых опять нечётный) Множество U определяется как множество всех вершин Gb, имеющих степень |V | − 1, то есть, соединённых со всеми вершинами.

(q – количество нечетных (по количеству вершин) компонент связности)

46. Связность в неориентированном графе – это отношение между вершинами: две вершины u и v называются связанными, если в графе G существует путь из u в v.

47. Сильная связность в ориентированном графе – это отношение между вершинами: две вершины u и v называются сильно связанными, если в графе G существует путь из u в v и из v в u

Слабая связность в ориентированном графе - это отношение между вершинами: вершины слабо связаны, если вершины u и v связаны в неориентированном графе G′, полученном из графа G удалением ориентации с рёбер.

48. Конденсация ориентированного графа – это представление исходного графа в виде конденсированного, в котором каждая вершина соответствует сильно связной компоненте исходного графа.

49. Вершинная связность – это минимальное число вершин, которые нужно удалить, чтобы граф стал несвязным или тривиальным. Обозначается κ(G)

50. Реберная связность – это минимальное число ребер, которые нужно удалить, чтобы граф стал несвязным или тривиальным. Обозначается λ(G)

51. Теорема Уитни: для любого графа κ(G) ≤ λ(G) ≤ δ (G).

Сначала докажем, что λ(G) ≤ δ (G). Пусть v – вершина с минимальной степенью вершины в графе δ (G). Тогда удалим все δ (G) инцидентных ей ребер, и граф перестанет быть связным (т.к. вершина v отделится от графа). Значит, граф максимум может быть δ (G)-реберно-связным (т.к. мы точно получим несвязный граф, удалив δ (G) ребер, но возможно обойдемся и меньшим количеством удаленных ребер). => λ(G) ≤ δ (G).

Теперь докажем, что κ(G) ≤ λ(G). Если G – несвязный или тривиальный граф, то κ(G) = λ(G) = 0. Если граф связный и имеет мост, то λ(G) = 1. Тогда κ(G) = 1, потому что мы можем удалить любую вершину, инцидентную этому ребру (она является точкой сочленения), либо у нас граф K2 и удалив вершину мы получим тривиальный. Если λ(G)>= 2, то если удалим из него λ – 1 ребро и получим мост (вот почему: у нас между любыми 2 вершинами есть ровно λ реберно не пересекающихся путей. Тогда уберем из каждого λ – 1 пути одно ребро, и останется только 1 путь, который будет содержать мост). Для каждого из этих λ – 1 ребер удаляем инцидентную вершину, отличную от вершин моста. Тогда удалится минимум эти λ – 1 ребер. Если граф перестал быть связным, то κ(G) < λ(G), а если связен, то остался мост, при удалении какой-то инцидентной вершины граф перестанет быть связным и κ(G) = λ(G).

52. k-связность (вершинная): это значит, что граф продолжает быть связным, если удалено меньше, чем k вершин.

53. Теорема Менгера: для любой пары несмежных вершин u и v в неориентированном графе, минимальный вершинный разрез равен количеству попарно внутренне вершинно не пересекающихся путей из u в v

Очевидно, что если k вершин разделяют s и t, то существует не более k непересекающихся простых (s−t) цепей. Теперь покажем, что если k вершин графа разделяют s и t, то существует k непересекающихся простых (s−t) цепей. Для k=1 это очевидно. Пусть, для некоторого k>1 это неверно. Возьмем h — наименьшее такое k и F — граф с наименьшим числом вершин, для которого при выбранном h теорема не верна. Будем удалять из F ребра, пока не получим G такой, что в G s и t разделяют h вершин, а в G−x h−1 вершина, где x— произвольное ребро графа G.

Из определения G следует, что для всякого его ребра x существует множество S(x) из h−1 вершин, которое в G−x разделяет s и t. Далее, граф G−S(x) содержит по крайней мере одну (s−t) цепь, так как граф G имеет h вершин, разделяющих s и t в G. Каждая такая (s−t) цепь должна содержать ребро x=uv, поскольку она не является цепью в G−x. Поэтому u,v∉S(x), и если u≠s,t то S(x)∪u разделяет s и t в G.

54. Двусвязность – это отношение между ребрами: два ребра называются двусвязными, если существует два вершинно-непересекающихся пути между концами этих ребер. Является отношением эквивалентности и делит ребра на блоки

55. Точки сочленения – это вершины, при удалении которых граф перестает быть связным

56. Мосты – это ребра, при удалении которых граф перестает быть связным

57. Блоки – это компоненты, на которые отношение двусвязности делит ребра графа

58. Дерево блоков-точек сочленения – это дерево, у которого вершинами являются блоки и точки сочленения. Ребро может существовать между блоками и точками сочленения, и если ребро есть, значит точка сочленения принадлежит блоку

59. Кратчайший путь в графе – это такой путь, для которого вес пути наименьший

60. Алгоритм Дейкстры

В ориентированном взвешенном графе G = (V, E), вес рёбер которого неотрицателен и определяется весовой функцией w: E→R, алгоритм Дейкстры находит длины кратчайших путей из заданной вершины s до всех остальных.

Суть: каждую итерацию выбираем вершину, до которой наикратчайший путь и она не помечена. Помечаем вершину и просматриваем все ребра из нее в непомеченные вершины, каждое пытаемся ослабить.

61. Алгоритм Беллмана-Форда

Ослабление всех ребер |V|-1 раз

(Dist[v] = min(dist[v], dist[u] + w (u, v)))

Суть алгоритма заключается в том, что на каждой i итерации он находит все пути длиной не более i ребер от начальной вершины до остальных вершин графа. Таким образом, после |V|-1-ой итерации алгоритма мы получаем все кратчайшие пути длиной не более |V| - 1 ребер. Асимптотика O(|V||E|)

62. Алгоритм Флойда-Уоршелла

Суть: ищем кратчайшие пути от всех до всех, выполняя релаксацию через каждую вершину. Каждая вершина может либо принадлежать, либо не принадлежать кратчайшему пути. Для каждой пары вершин делаем релаксацию через каждую вершину

63. Иерархическая кластеризация

Иерархическая кластеризация — это метод кластеризации (группировка объектов), при котором каждая вершина сначала является отдельным кластером, а затем на каждом шаге алгоритма находятся два наиболее близких кластера и объединяются в один, пока не останется только один кластер. Близость кластеров определяется по мере расстояния между ними.

64. WPGMA/UPGMA алгоритмы

WPGMA и UPGMA - это два метода восстановления деревьев на основе матрицы расстояний между вершинами. Финальное дерево ультраметрично

WPGMA (Weighted Pair Group Method with Arithmetic Mean) - это алгоритм, который на каждом шаге объединяет два ближайших кластера с помощью арифметического среднего значения расстояний между всеми парами объектов в кластерах.

UPGMA (Unweighted Pair Group Method with Arithmetic Mean) - это алгоритм, аналогичный WPGMA, но в котором значение расстояния домножается на количество